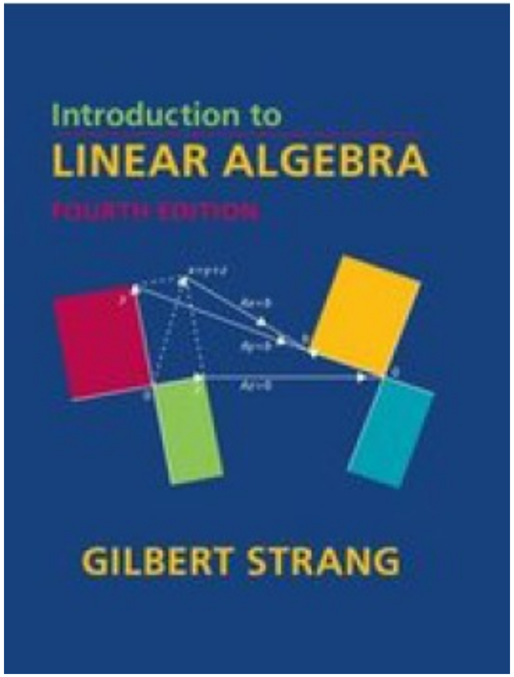
Tema 1: Vectores y Matrices

Curso 2016/2017

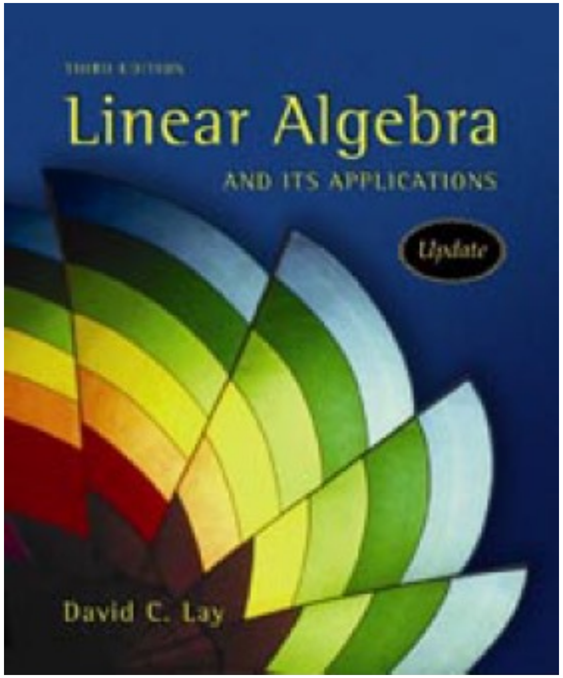
Ruzica Jevtic
Universidad San Pablo CEU
Madrid

Índice de contenidos

Referencias



Strang G. *Introduction to linear algebra (4th ed).* Wellesley Cambridge Press (2009). Chapter 1



Lay D. *Linear algebra and its applications (3rd ed)*. Pearson (2006). Chapter 1.

Reseña histórica

- Los vectores fueron desarrollados durante el siglo XIX por matemáticos y físicos como *Carl Friedrich Gauss (1799)*, *William Rowan Hamilton (1837)*, y *James Clerk Maxwell (1873)*
- Herramienta para la representación de números complejos y para realizar razonamiento geométrico
- El álgebra moderno fue formalizado por *Josiah Willard Gibbs (1901)*, que era profesor en Yale

Índice de contenidos

- Vectores y operaciones básicas
- Combinaciones lineales
- Producto escalar – interior – interno – punto
- Norma, Longitud de un vector y vectores unitarios
- Distancias y ángulos
- Multiplicación por matrices

¿Qué es un vector?

- Informalmente, un vector es una colección <u>ordenada</u> de *n* números del mismo tipo. Decimos que tiene *n* componentes (1, 2, …,n)

Ejemplos	
$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in Z^3$	Es una colección de tres números enteros
$\begin{pmatrix} -1.1 \\ 1.1 \end{pmatrix} \in Q^2$	Es una colección de dos números racionales
$\begin{pmatrix} -1.1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \in R^2$	Es una colección de dos números reales

Octave - Matlab
[-1; 0; 1]
[-1.1; 1.1]
[-1.1; sqrt(2)]

CEU Universidad San Pablo

Vectores en $\mathbb{R}^2$

- Una matriz con una sola columna se denomina vector columna o simplemente vector
- Ejemplos de vectores con 2 entradas son:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} .2 \\ .3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

donde *w1* y *w2* puede ser cualquier número real.

- Al conjunto de todos los vectores con 2 entradas se le denomina $\mathbb{R}^2$
- Dos vectores en $\mathbb{R}^2$ son iguales si y sólo si sus correspondientes entradas son iguales

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} \text{ ... pero ... } \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Vectores en $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^n$

- En $\mathbb{R}^3$, los vectores tienen 3 entradas: $$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

  Al conjunto de todos los vectores con 3 entradas se le denomina $\mathbb{R}^3$

- En $\mathbb{R}^n$, los vectores tienen n entradas: $$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

  Al conjunto de todos los vectores con n entradas se le denomina $\mathbb{R}^n$

- Al vector cuyas entradas son todas cero, se le denomina Vector Cero y se le denota como $\mathbf{0}$.

Traspuesta de un vector

- Distinguiremos entre vector columna **(v)** y vector fila **(w)**

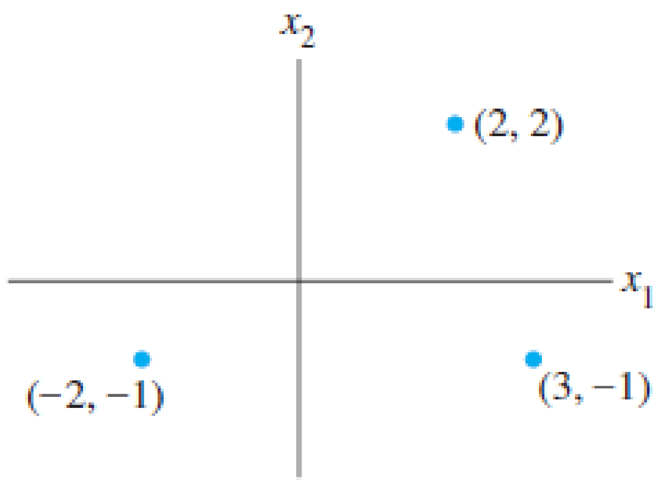
$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ v_n \end{pmatrix} \qquad \mathbf{w} = (w_1 w_2 \ldots w_n)$$

- En el primer caso, decimos que **v** es un vector de n x 1 posiciones, mientras que en el segundo caso, decimos que **w** es un vector de 1 x n posiciones.

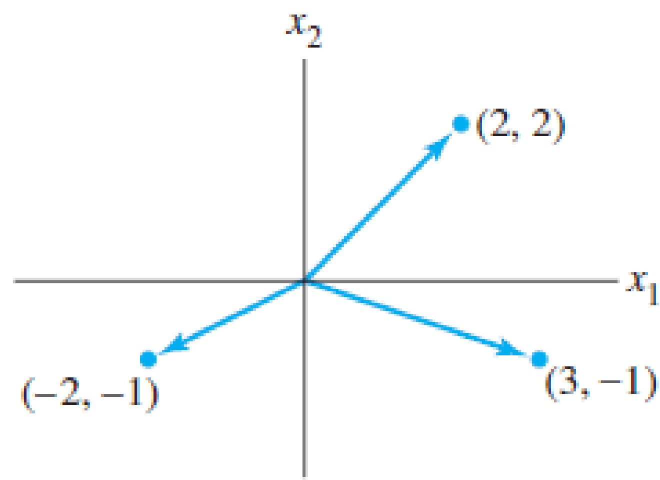
Ejemplos
$(-1\ \ 1)^T = \binom{-1}{1}$

Octave
[-1 1]’

- En $\mathbb{R}^2$:
  - Si consideramos un sistema de coordenadas rectangular (plano), cada punto viene determinado por un par ordenado de números (punto geométrico) → (a, b)
  - Se puede identificar el punto (a,b) con el vector columna $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$
  - Origen: (0, 0)



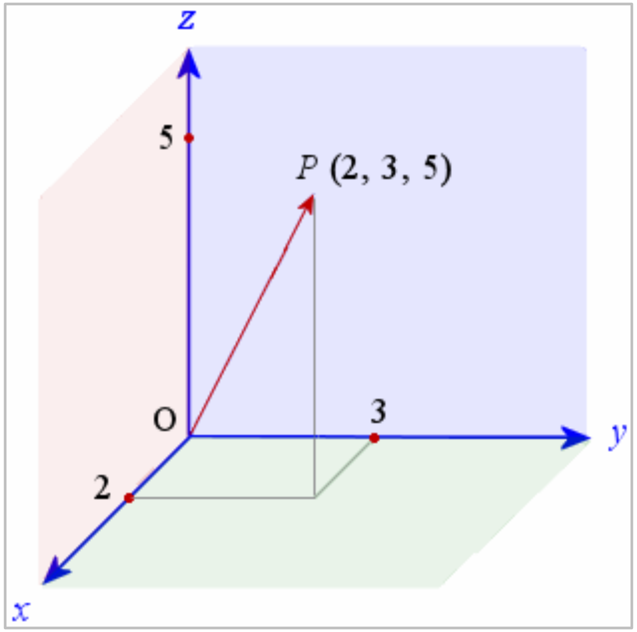
Vectores como puntos (localización en el espacio)

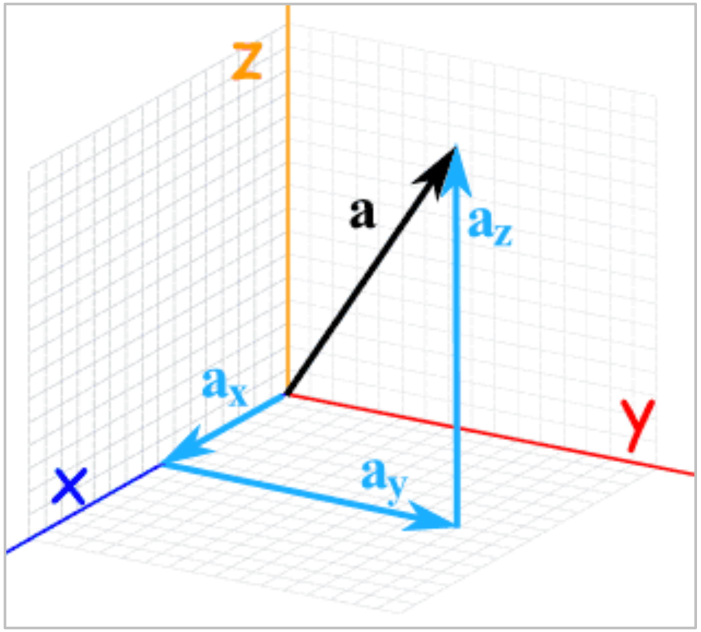


Vectores como flechas (orientación + sentido)

Representación gráfica (descripción geométrica)

- En $\mathbb{R}^3$:
  - Geométricamente, se representa como un punto o una flecha en un espacio de coordenadas tridimensional
  - Origen: (0, 0, 0)





CEU Universidad San Pablo

Suma de vectores

- Dados dos vectores **u** y **v** $\in \mathbb{R}^2$, la suma de los dos vectores (u + v) se obtiene sumando los valores que ocupan el mismo orden dentro de los vectores

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 1+2 \\ -2+5 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}+\mathbf{v}}$$

Octave
[1; -2] + [2; 5]

Suma de vectores

- De manera general, la suma de dos vectores $\in \mathbb{R}^n$, se define como:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_n \end{pmatrix} \qquad u + w = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ \dots \\ v_n + w_n \end{pmatrix}$$

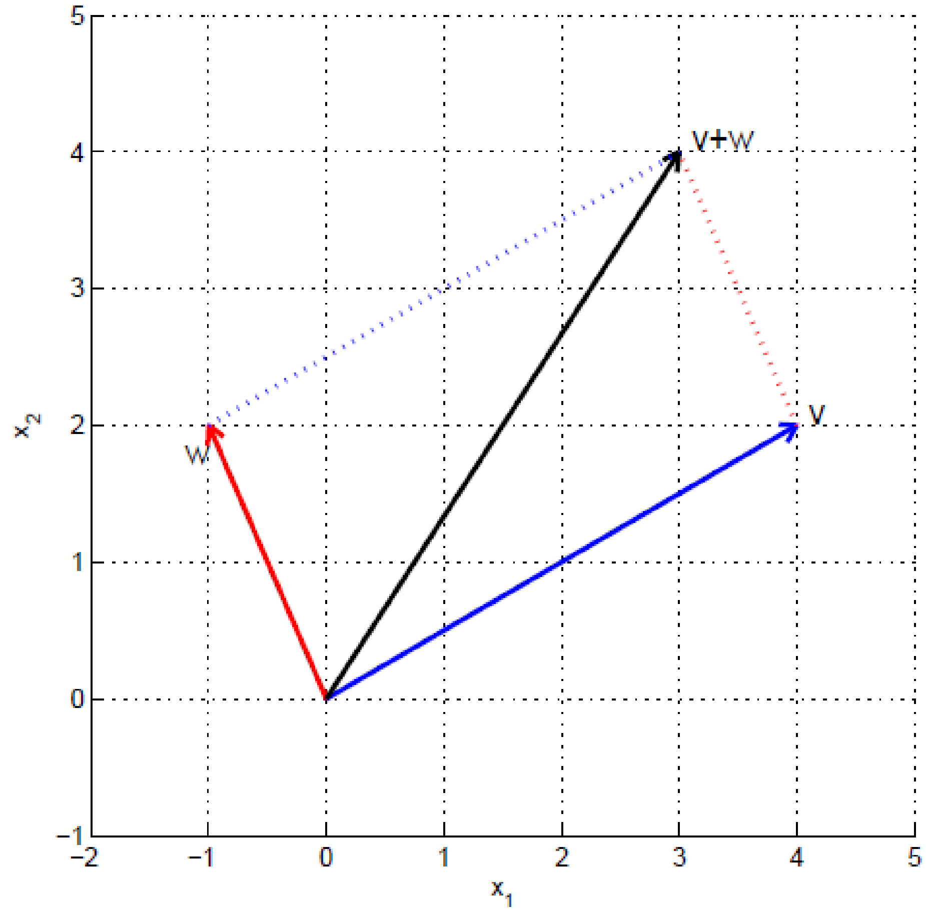
- Nota: dos vectores se pueden sumar si y solamente si son del mismo tipo (vectores fila o vectores columna)

CEU Universidad San Pablo

Suma de vectores – Interpretación geométrica

$$v = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$u + w = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$



Producto por un escalar

- Dado un vector **u** $\in \mathbb{R}^2$ y un número real *c*, la multiplicación escalar de **u** por *c*, es el **vector cu** obtenido al multiplicar cada entrada de **u** por *c*

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad c = 5 \qquad\qquad c\mathbf{u} = 5\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Octave
5 * [3; -1]

CEU Universidad San Pablo

Producto por un escalar

- De manera general, dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ y un escalar c, la multiplicación de c por **v** se define como:

$$c\mathbf{v} = \begin{pmatrix} c\mathrm{v}_1 \\ c\mathrm{v}_2 \\ \dots \\ c\mathrm{v}_n \end{pmatrix}$$

Ejemplos

$$2\begin{pmatrix} -1.1 \\ 1.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.2 \\ 2.2 \end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix} -1.1 \\ 1.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 \\ -1.1 \end{pmatrix}$$

Octave

2 * [-1.1; 1.1]

- [-1.1; 1.1]

Producto por un escalar – Interpretación geométrica

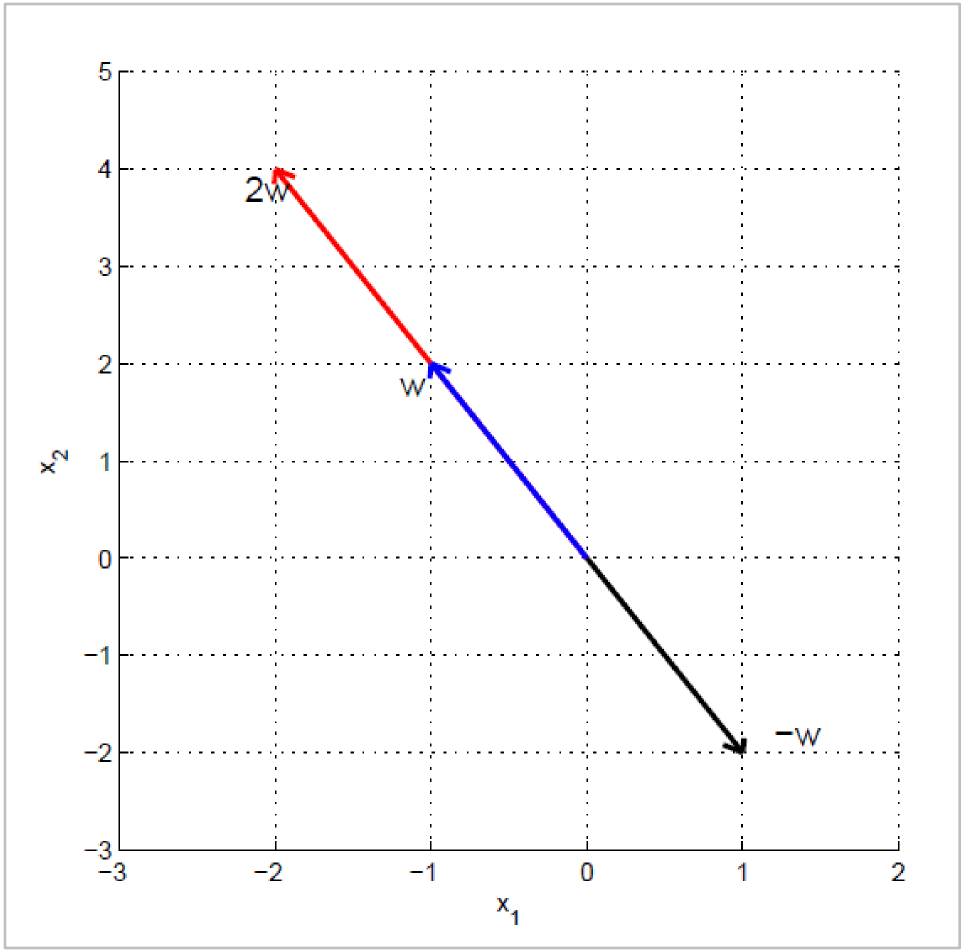
$$w = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$2w = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$-w = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

¿Cuál es la forma de todos los vectores **w** escalados de la forma *c***w**?

- Si w = 0, entonces es un punto (0)
- Si w ≠ 0, entonces es la recta que pasa por el 0 y w.



Ejemplo de combinación de operaciones

Ejemplo

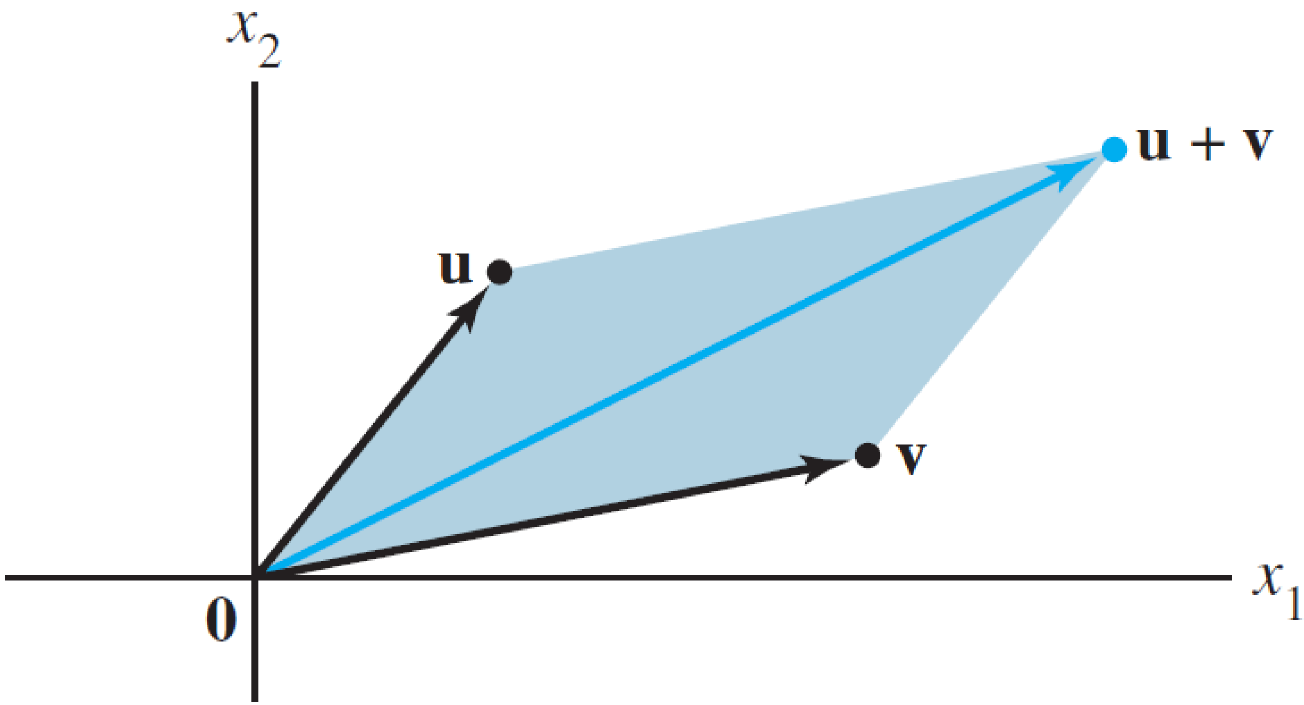
Dados los vectores $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$, calcular **4u**, **(-3)v**, y **4u + (-3)v**

$$4\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \end{bmatrix} \qquad (-3)\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -6 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$4\mathbf{u} + (-3)\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

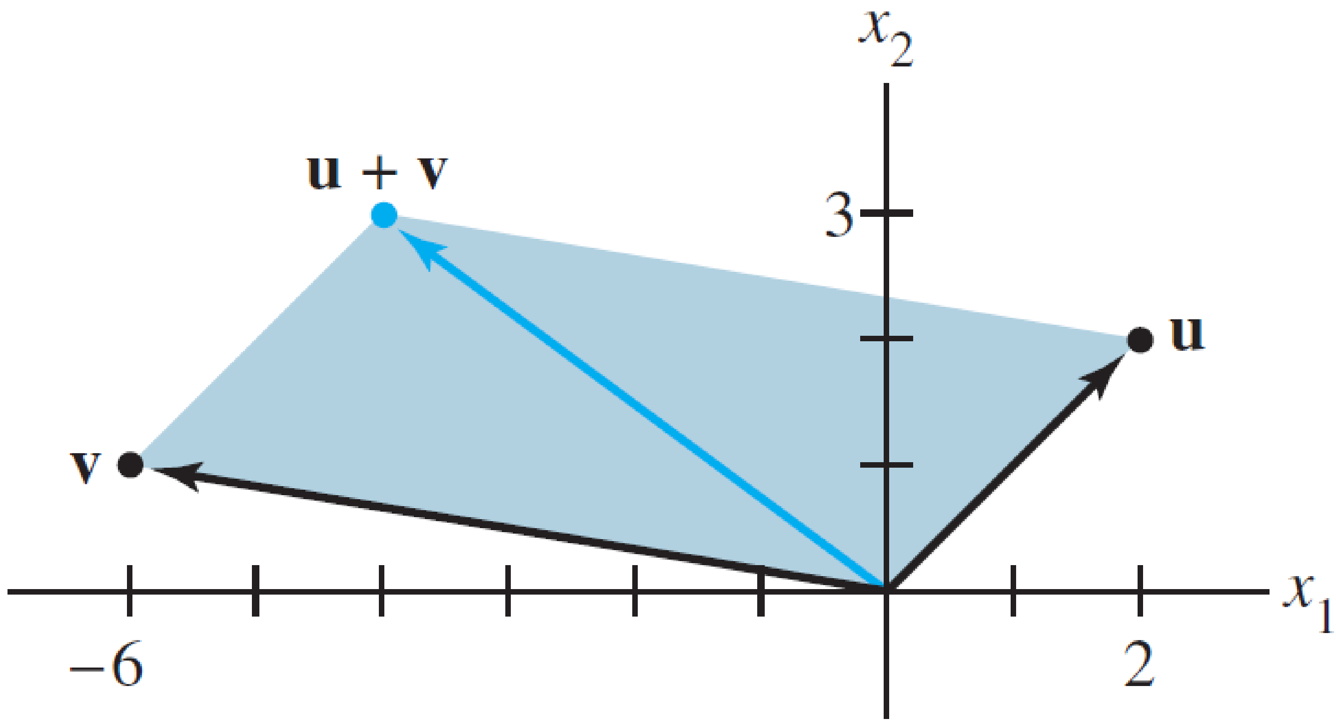
Regla del paralelogramo para la suma

- Si dos vectores **u** y **v** $\in \mathbb{R}^n$ son representados como puntos en el plano, entonces **u + v** corresponde al cuarto vértice del paralelogramo cuyos otros vértices son **u**, **0**, y **v**



Regla del paralelogramo para la suma

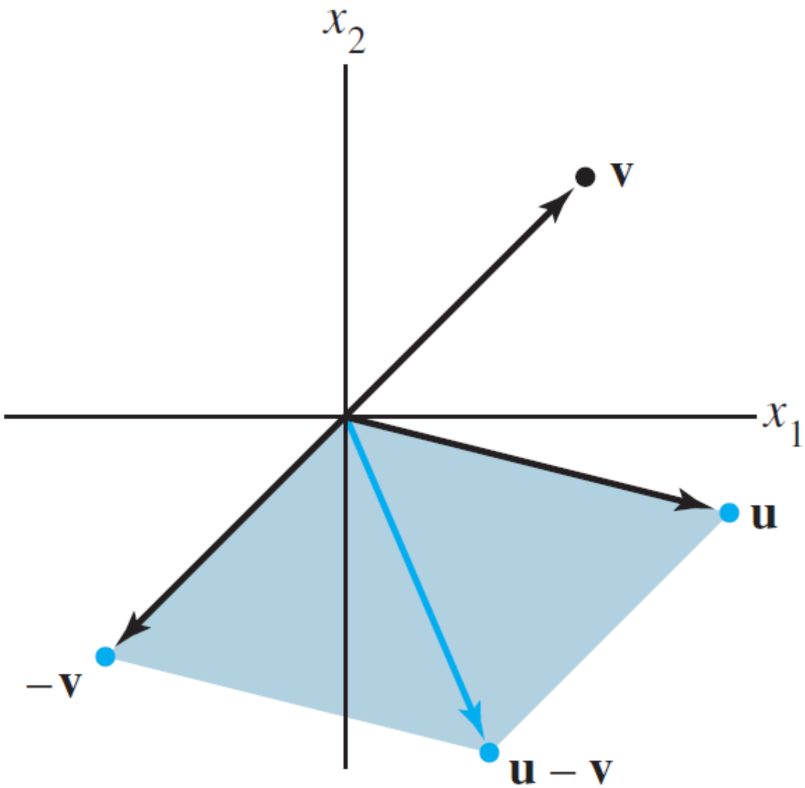
- Ejemplo: dibujar los vectores $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{2} \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{-6} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$, y **u+v**



Resta de vectores

- Dados 2 vectores **u** y **v**, la resta de ambos es equivalente a sumar al primero el simétrico/opuesto del segundo

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-1)\mathbf{v}$$



Propiedades algebraicas en $\mathbb{R}^n$

- Para todo vector **u, v, w** $\in \mathbb{R}^n$ y todo escalar *c* y *d*, se verifica:

Respecto a la suma de vectores	
(i)	$\mathrm{u} + \mathrm{v} = \mathrm{v} + \mathrm{u}$
(ii)	$(\mathrm{u} + \mathrm{v}) + \mathrm{w} = \mathrm{u} + (\mathrm{v} + \mathrm{w})$
(iii)	$\mathrm{u} + 0 = 0 + \mathrm{u} = \mathrm{u}$
(iv)	$\mathrm{u} + (-\mathrm{u}) = -\mathrm{u} + \mathrm{u} = 0$

Respecto a la suma de vectores y producto escalar	
(v)	$c\,(\mathrm{u} + \mathrm{v}) = c\,\mathrm{u} + c\,\mathrm{v}$
(vi)	$(c + d)\,\mathrm{u} = c\,\mathrm{u} + d\,\mathrm{u}$

Respecto al producto escalar	
(vii)	$c\,(d\,\mathrm{u}) = (c\,d)\,\mathrm{u}$
(viii)	$1\,\mathrm{u} = \mathrm{u}$

Índice de contenidos

Combinación lineal

- Dado un conjunto de *p* vectores $(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \dots, \mathrm{vp}) \in \mathbb{R}^n$ y un conjunto de *p* escalares $(c_1, c_2, \dots, c_p)$, se denomina **combinación lineal** al vector **y** definido como:

$$y = \sum_{i=1}^{p} c_i\,\mathbf{v}_i = c_1\,\mathbf{v}_1 + c_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + cp\,\mathbf{v}_p$$

Ejemplos: dados los vectores $\mathbf{v_1}$ y $\mathbf{v_2}$

$\sqrt{3}\,v_1 + v_2$	$\frac{1}{2} v1 \,(= \frac{1}{2} v_1 + 0\,v_2)$	$0\,(= 0\,v_1 + 0\,v_2)$

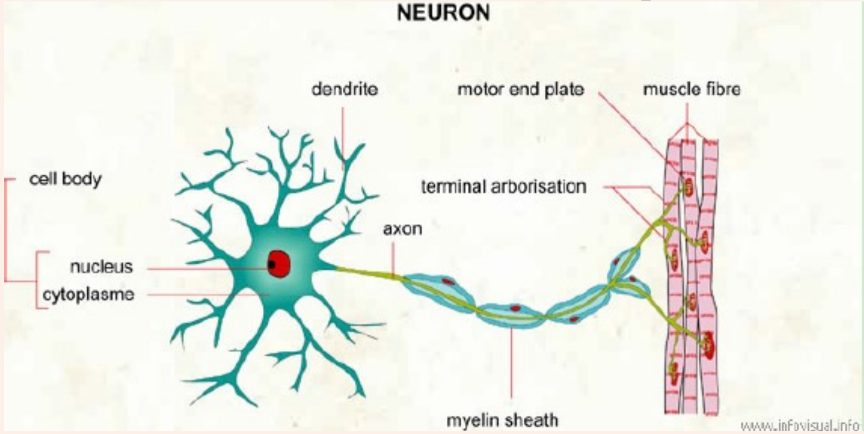
Combinación lineal

Ejemplo: modelización de una neurona

Un modelo muy básico y aceptado de la actividad de una neurona viene dado por:

$$output = f\left(\sum_i peso_i \cdot entradai\right)$$

donde **f(x)** no es una función lineal. Este modelo se usa para modelizar redes de neuronas artificiales.



El cerebro humano tiene del orden de 10^{11} neuronas y unas 10^{18} conexiones (https://www.youtube.com/watch?v=zLp-edwiGUU)

CEU Universidad San Pablo

Combinación lineal

Ejemplo

$$2\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12\\11\end{bmatrix}$$

Octave

```
format rat
2 * [1; 3] + 5 * [2; 1]
```

Ejemplo

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}-\frac{2}{3}\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{11}{6}\\-\frac{5}{6}\end{bmatrix}$$

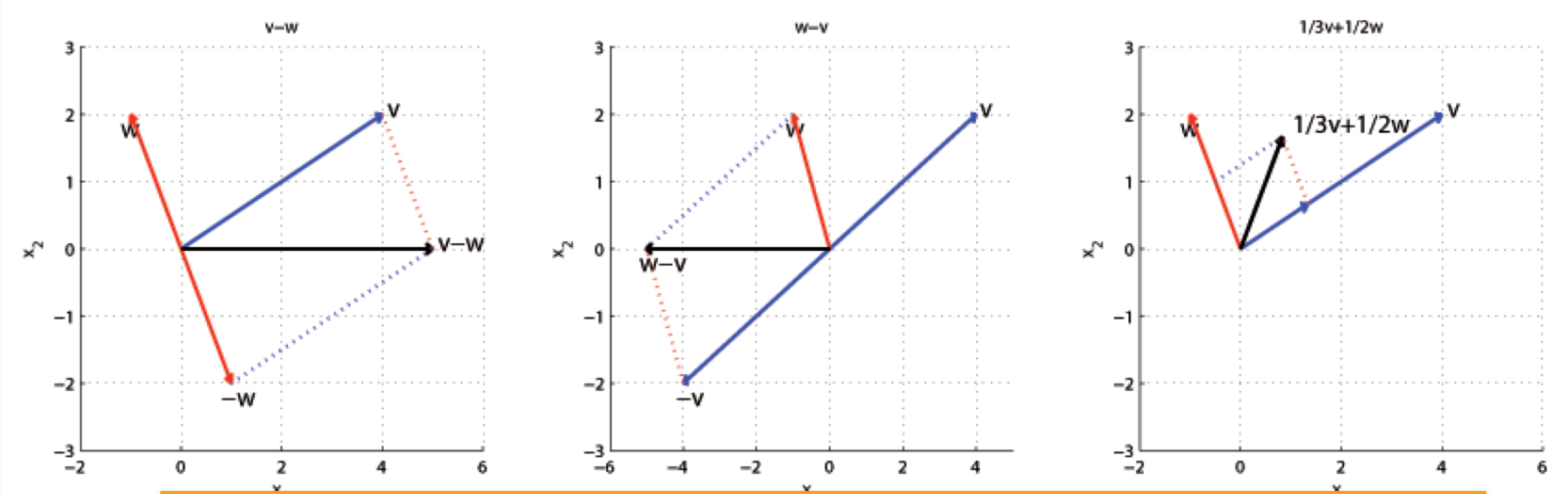
Octave

```
format rat
1/2 * [-1; 1] – 2/3 * [2; 2]
```

Combinación lineal

Ejemplo

Dados $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, calcular y representar gráficamente **v - w**, **w - v**, **1/3v + 1/2w**



Puede pensarse en los coeficientes como instrucciones de movimiento. Por ejemplo, en la figura de la derecha, las instrucciones serían:
"muévete 1/3 de **v** a lo largo de **v**, y después 1/2 de **w** a lo largo de **w**".

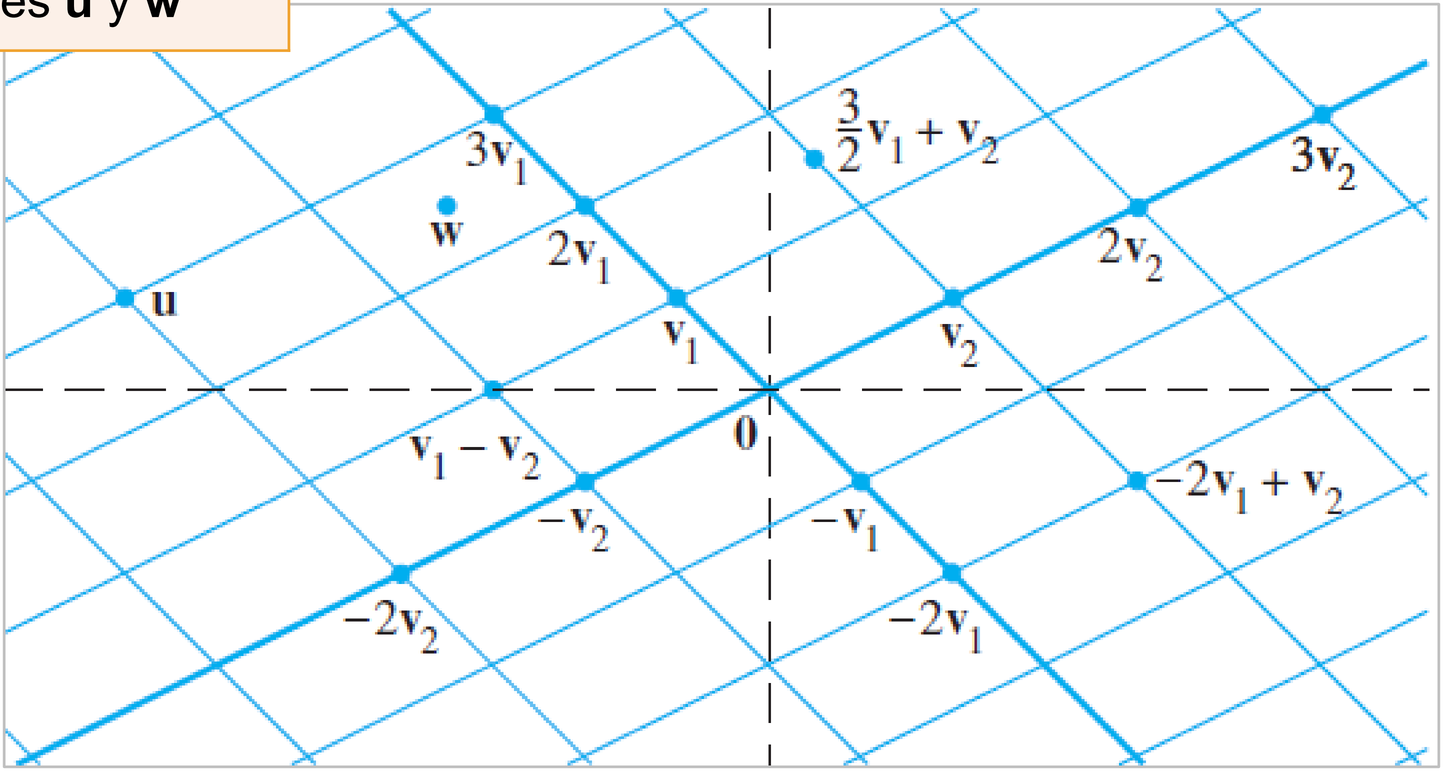
Combinación lineal

Ejemplo

Dados $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, estimar las combinaciones lineales para generar los vectores **u** y **w**

$\mathbf{u} = 3\ \mathbf{v_1} – 2\ \mathbf{v_2}$

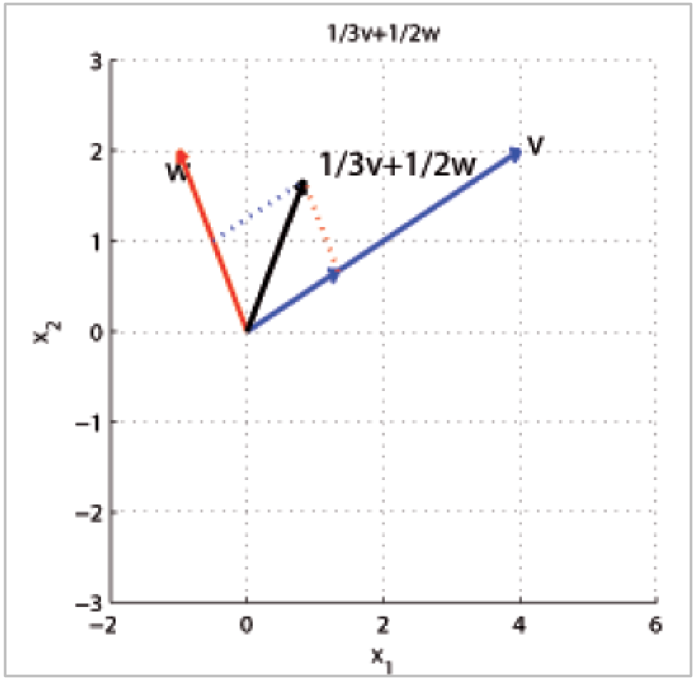
$\mathbf{w} = 5/2\ \mathbf{v_1} – 1/2\ \mathbf{v_2}$



- ¿Qué forma tienen todas las combinaciones lineales de la forma $c\mathbf{v} + d\mathbf{w}$?
  - Si los dos vectores no son colineales (es decir, $\mathbf{w} \neq k\mathbf{v}$), entonces es un plano que pasa por **0**, y contiene a **v** y **w**.

El plano generado por **v** y **w** es el conjunto de todos los vectores que pueden ser generados como una combinación lineal de ambos vectores

$$\Pi = \{ r \mid r = c\mathbf{v} + d\mathbf{w} \quad \forall c, d \in \mathbb{R} \}$$



Combinación lineal

- El subespacio generado (*spanned subspace*) por los vectores $(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \dots, \mathrm{vp}) \in \mathbb{R}^n$ es el conjunto de todos los vectores que pueden ser expresados como una combinación lineal de dichos vectores
- Formalmente se define como:

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p \rangle = \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p\} \triangleq \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \,|\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + xp\mathbf{v}_p\}$$

Ejemplo

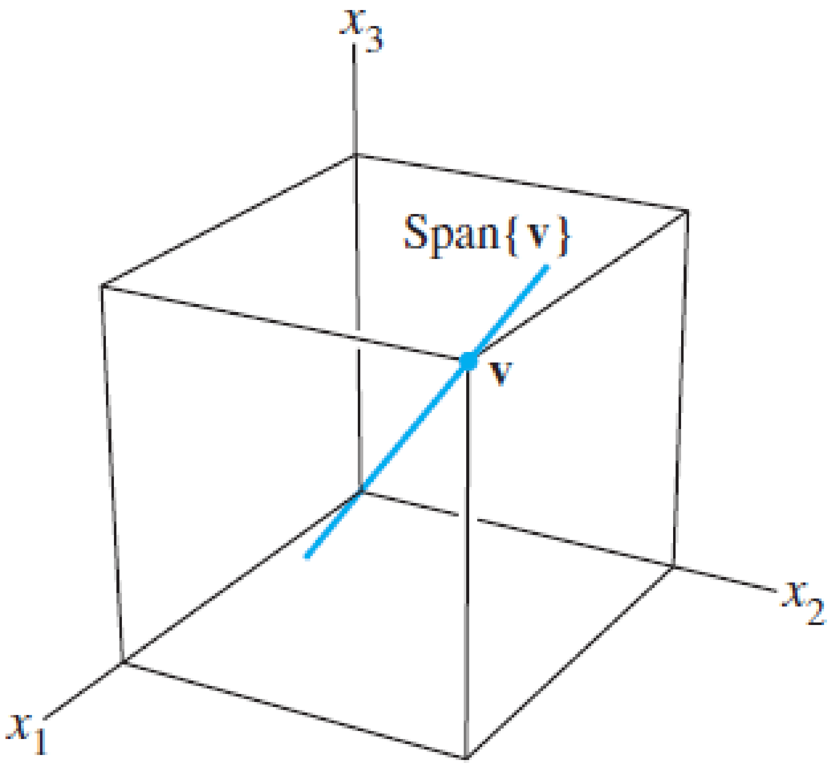
Asumiendo que todos los vectores son linealmente independientes:

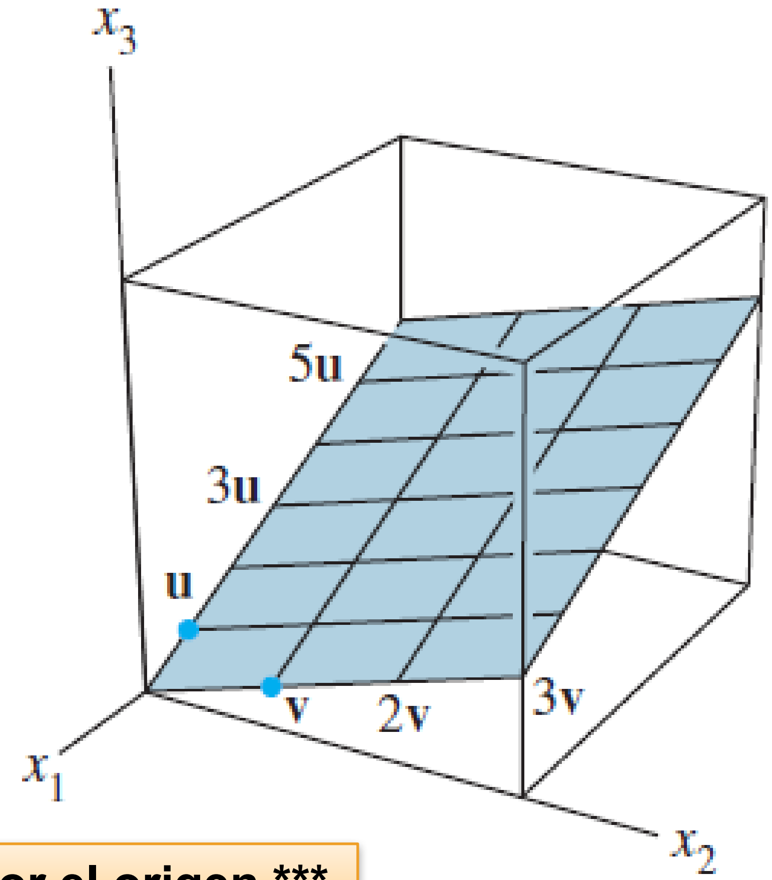
- **Span{$\mathbf{v}_1$}** es una línea recta
- **Span{$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$}** es un plano
- **Span{$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_{n-1}$}** es un hiperplano

Propiedad

$\mathbf{0} \in \mathbf{Span}\,\{\cdot\}$

Descripción geométrica del **Span{v}** y el **Span{u, v}**





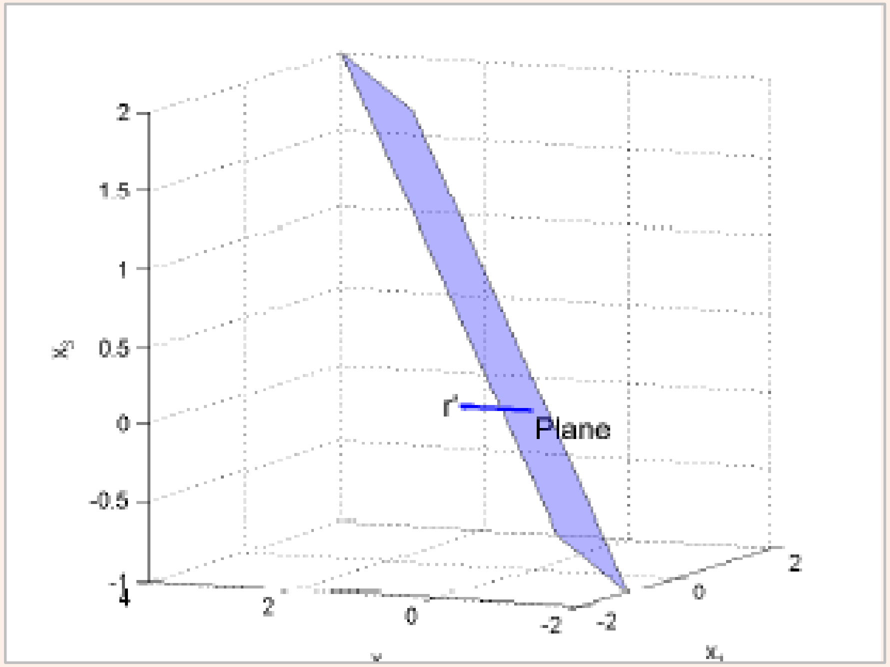
*** Todos ellos pasan por el origen ***

Fuera del plano

Dado **v** = (1, 1, 0) y **w** = (0, 1, 1), las combinaciones lineales de **v** y **w** forman un plano en 3D. Todos los puntos pertenecientes a este plano son de la forma:

$$\Pi = \{\, r \mid r = c\,(1,1,0) + \, d\,(0,1,1) \ \ \forall c,d \ \in \mathbb{R}\} = \{\, r = (c, c+d, d) \ \ \forall c,d \ \in \mathbb{R}\}$$

Por tanto, el vector $\mathbf{r'} = (0, 1, 0) \notin \Pi$ y está fuera del plano.

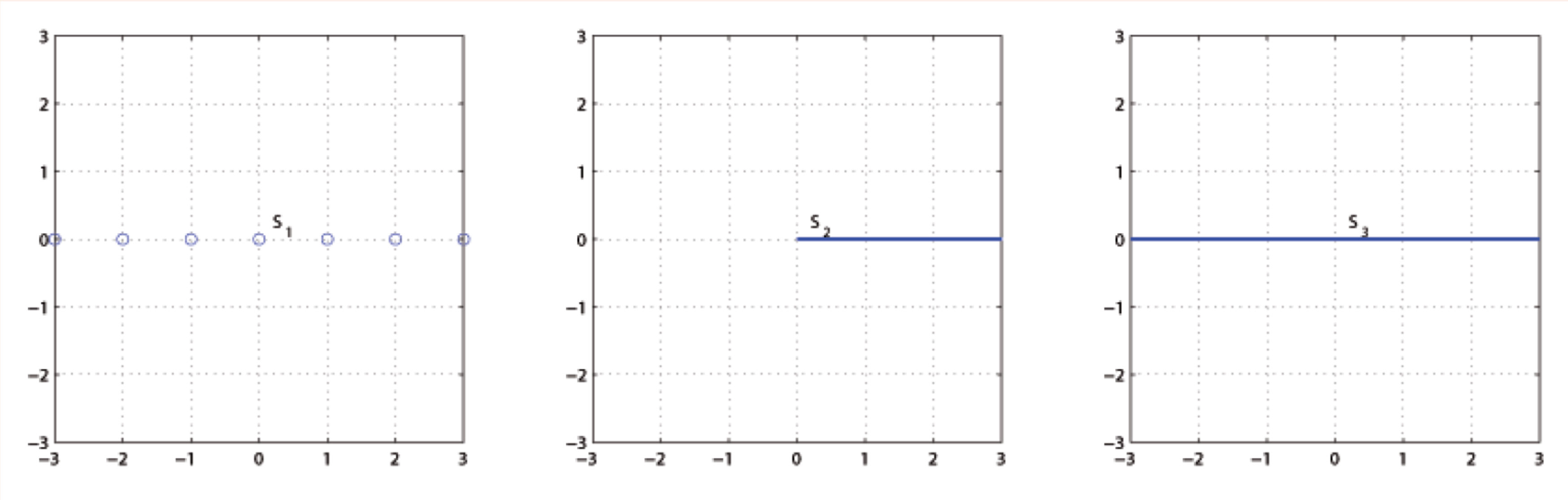


Combinación lineal

Conjuntos de puntos

Dado $\mathbf{v} = (1, 0)$,

1. $S_1 = \{\, r = c\mathbf{v},\ \forall c \in \mathbb{Z} \,\}$ es un conjunto de puntos
2. $S_2 = \{\, r = c\mathbf{v},\ \forall c \in \mathbb{R}^+ \,\}$ es una semilínea
3. $S_3 = \{\, r = c\mathbf{v},\ \forall c \in \mathbb{R} \,\}$ es una línea



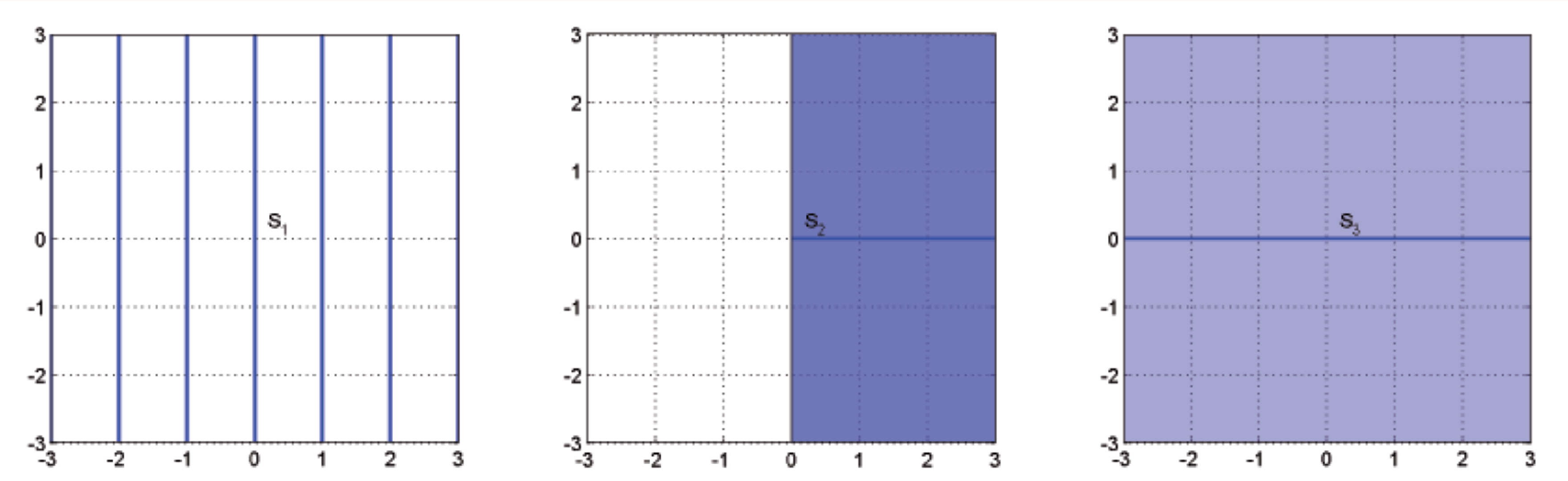
CEU Universidad San Pablo

Combinación lineal

Conjuntos de puntos

Dado $\mathbf{v} = (1, 0)$ y $\mathbf{w} = (0, 1)$,

1. $S_1 = \{ r = c\mathbf{v} + d\mathbf{w},\ \forall c \in \mathbb{Z}, \forall d \in \mathbb{R} \}$ es un conjunto de líneas
2. $S_2 = \{ r = c\mathbf{v} + d\mathbf{w},\ \forall c \in \mathbb{R}^+, \forall d \in \mathbb{R} \}$ es un semiplano
3. $S_3 = \{ r = c\mathbf{v} + d\mathbf{w},\ \forall c,d \in \mathbb{R} \}$ es un plano



Combinación lineal

Combinación de coeficientes

Dado **v** =(2, -1), **w** =(-1, 2) y **b** =(1, 0), encontrar un valor para c y d tal que $\mathbf{b} = c\mathbf{v} + d$

Solución:

Necesitamos encontrar un c y un d tales que:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c - d \\ 2d - c \end{bmatrix}$$

Esto nos da un sistema simple de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2c - d &= 1 \\ 2d - c &= 0 \end{aligned}$$

Cuya solución es $c = 2/3$ y $d = 1/3$

Octave

2/3 * [2; -1] + 1/3 * [-1; 2]

Ejercicios

- Del capítulo 1, sección 3 de *Lay (4th ed.):*
  - Ejercicio 1.3.1
  - Ejercicio 1.3.2
  - Ejercicio 1.3.3
  - Ejercicio 1.3.7
  - Ejercicio 1.3.8
  - Ejercicio 1.3.25
  - Ejercicio 1.3.27
  - Ejercicio 1.3.29
  - Ejercicio 1.3.31

Índice de contenidos

- Vectores y operaciones básicas
- Combinaciones lineales
- Producto escalar – interior – interno – punto
- Norma, Longitud de un vector y vectores unitarios
- Distancias y ángulos
- Multiplicación por matrices

Producto escalar de 2 vectores

- Producto escalar – interior – interno – punto (Inner – dot product)

- Dados dos vectores **v** y **w**, el producto escalar entre ambos se define como:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \triangleq \mathbf{v}^T \mathbf{w} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}_i \mathbf{w}_i = \mathbf{v}_1 \mathbf{w}_1 + \mathbf{v}_2 \mathbf{w}_2 + \cdots + \mathbf{v}_n \mathbf{w}_n$$

- Matemáticamente, el concepto de producto escalar es mucho más general. La definición anterior es una particularización para vectores $\in \mathbb{R}^n$. Aunque es el más común, no es el único.

Producto escalar de 2 vectores

Ejemplos	Octave
$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = 4 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = 0$	dot([4; 2], [-1; 2])
$\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = (-3) \cdot (-2) + 4 \cdot (-1) = 2$	dot([-3; 4], [-2; -1])
$\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = 2 \cdot 3 + (-3) \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) = 7$	dot([2; -3; 1], [3; -1; -2])

Propiedad
Conmutativa **v · w = w · v**

Índice de contenidos

- Vectores y operaciones básicas
- Combinaciones lineales
- Producto escalar – interior – interno – punto
- Norma, Longitud de un vector y vectores unitarios
- Distancias y ángulos
- Multiplicación por matrices

Norma y longitud de un vector

- La longitud o norma de un vector **v** $\in \mathbb{R}^n$ es un escalar no negativo **||v||** definido como:

$$\|\mathbf{v}\| \triangleq \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}\ ; \quad \mathbf{y} \quad \|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$$

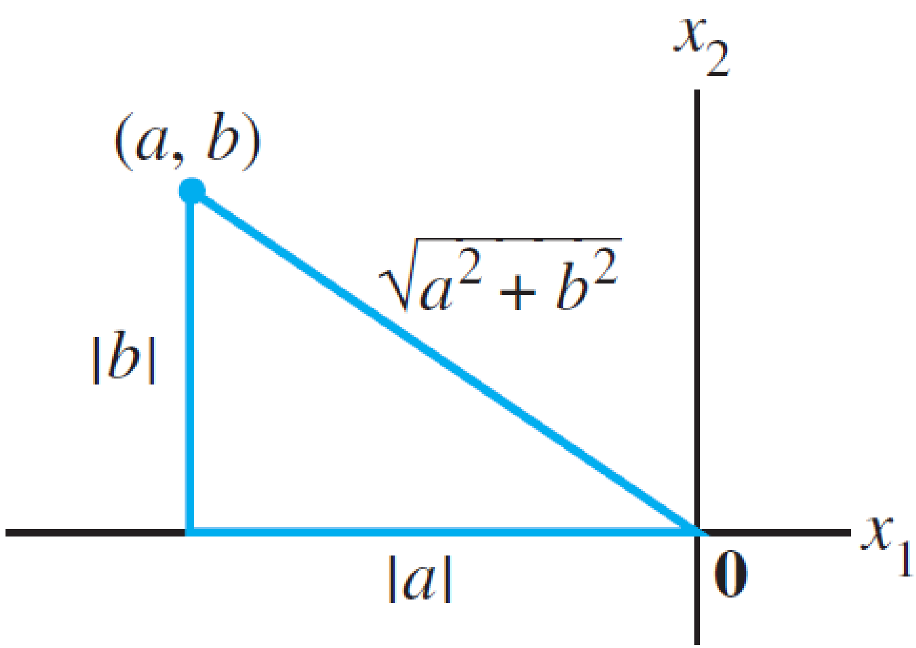
- En el caso particular de trabajar con el producto escalar anteriormente presentado, esta definición se reduce a:

$$\|\mathbf{v}\| \triangleq \sqrt{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$$

que es conocida como norma Euclídea del vector **v**.

Norma y longitud de un vector

- En particular para $\mathbb{R}^2$, si tenemos $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ e identificamos **v** con un punto geométrico en el plano, entonces **||v||** coincide con la longitud del segmento desde el origen hasta **v** (Teorema de Pitágoras)

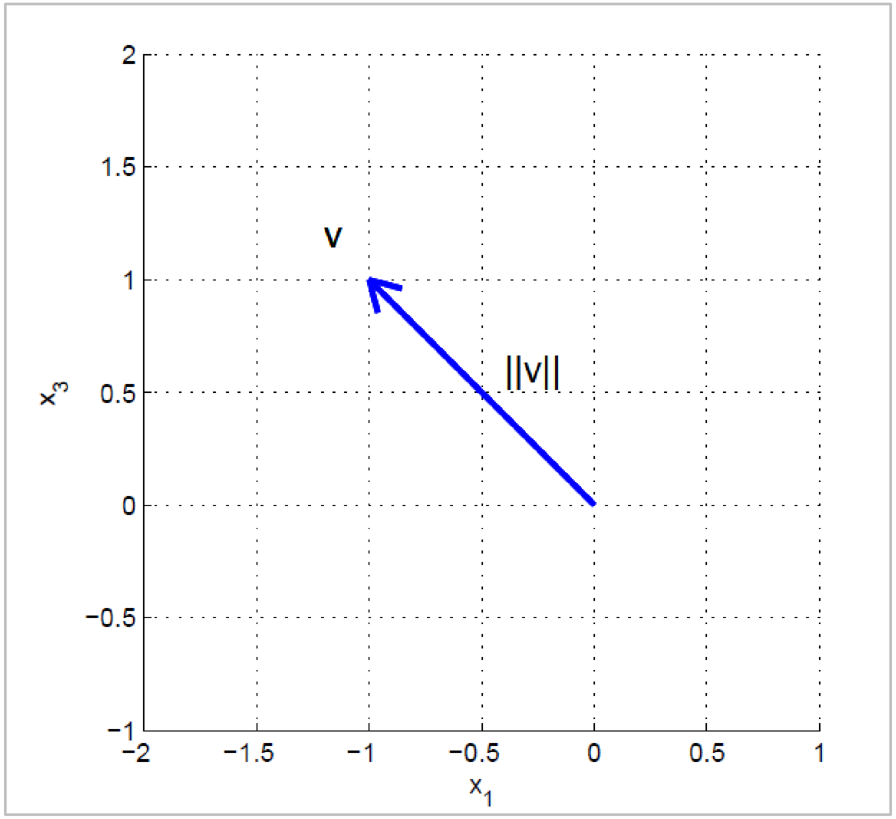


Propiedades
$\|\|-\mathrm{v}\|\| = \|\|\mathrm{v}\|\|$
$\|\|c\,\mathbf{v}\|\| = \|c\|\,\|\|\mathbf{v}\|\|$

Norma y longitud de un vector

Ejemplos
$\lVert(3,7)\rVert = \sqrt{3^2+7^2} = \sqrt{58} = 7{,}6158$
$\lVert(-2,5)\rVert = \sqrt{(-2)^2+5^2} = \sqrt{29} = 5{,}3852$
$\lVert(-1,0,1)\rVert = \sqrt{(-1)^2+0^2+1^2} = \sqrt{2} = 1{,}4142$

Octave
norm([3; 7])
norm([-2; 5])
norm([-1; 0; 1])



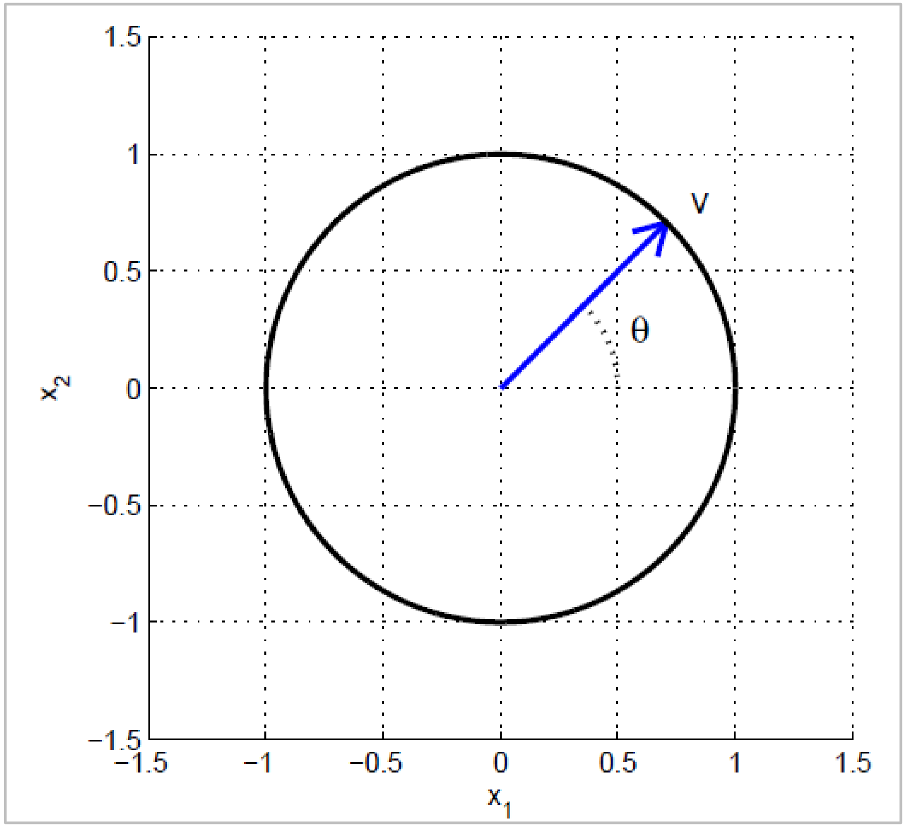
CEU Universidad San Pablo

Vectores unitarios

- Un vector **v** es unitario si y sólo si ||v|| = 1

Ejemplos
$\mathbf{u} = (1, 0)$
$\mathbf{v} = (0, 1)$
$\mathbf{w} = (\cos(45^o), \sin(45^o)) = (\cos\left(\frac{\pi}{4}\right), \sin\left(\frac{\pi}{4}\right))$

Octave
norm([1; 0])
norm([0; 1])
norm([cos(pi/4), sin(pi/4)])



Construcción de un vector unitario (normalización)

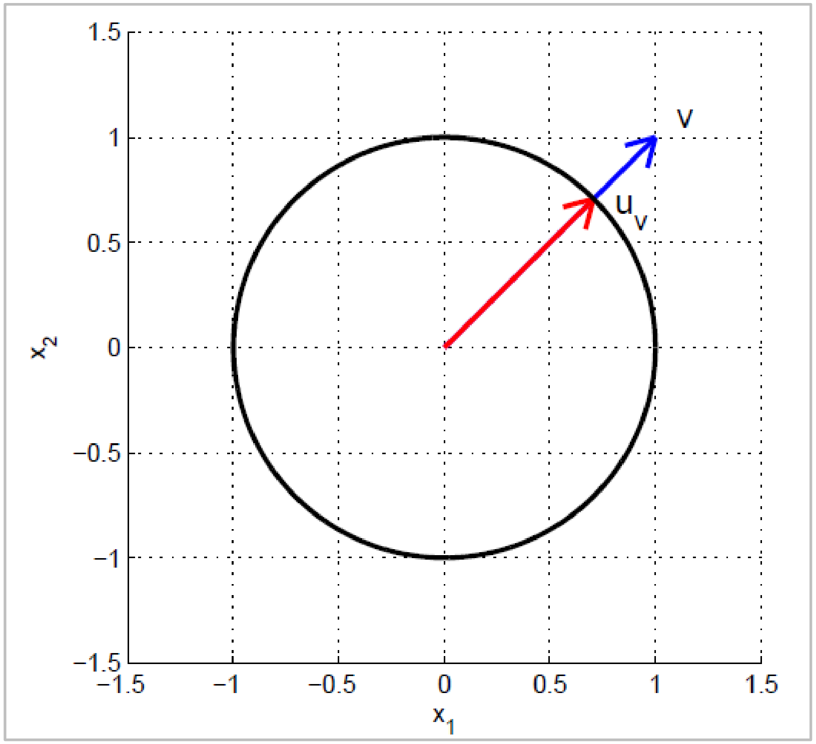
- Dado un vector **v** (cuya norma no es nula), siempre se puede construir un vector unitario con la misma dirección de **v** dividiendo el vector por su longitud (es decir, multiplicando el vector por **1/||v||**)

$$\mathbf{u_v} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$$

Ejemplo

$\mathbf{v} = (1, 1)$

$$\mathbf{u_v} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{(1,1)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$



CEU Universidad San Pablo

Ejemplos

Dado el vector **v** = (1, -2, 2, 0), encontrar el vector unitario **u** en la misma dirección que **v**

Solución:

Primero calculamos la longitud de **v:**

$||\mathbf{v}||^2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = (1)^2 + (-2)^2 + (2)^2 + (0)^2 = 9 \quad ; \quad ||v|| = \sqrt{9} = 3$

Después multiplicamos el vector **v** por 1/||**v**||, obteniendo:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v} = \frac{1}{3}\mathbf{v} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para comprobar que ||**u**|| = 1, es suficiente con comprobar que $||\mathbf{u}||^2 = 1$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|^2 &= \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 + \left(-\tfrac{2}{3}\right)^2 + \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 + (0)^2 \\ &= \tfrac{1}{9} + \tfrac{4}{9} + \tfrac{4}{9} + 0 = 1 \end{aligned}$$

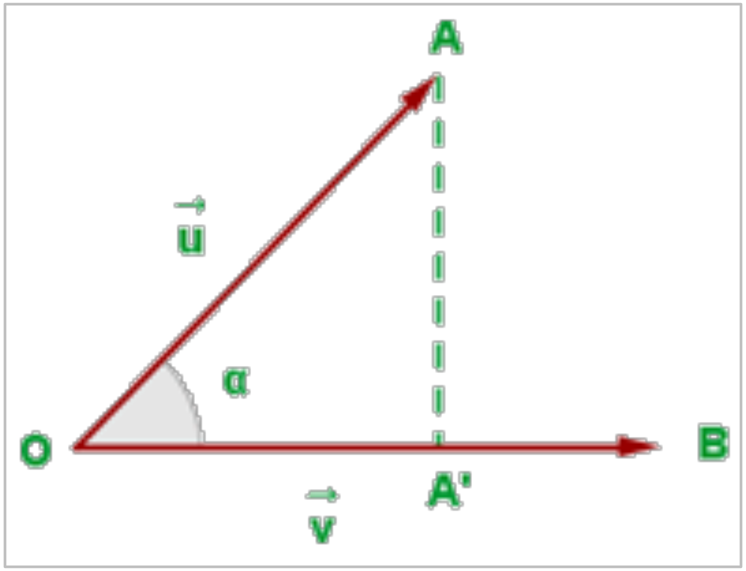
Interpretación geométrica del producto escalar

- El producto escalar de dos vectores no nulos, es igual a la norma de uno de ellos por la proyección del otro sobre él

- También puede verse como el producto de las normas por el coseno del ángulo que forman los 2 vectores

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\|\mathbf{OA}'\|}{\|\mathbf{u}\|}$$



Índice de contenidos

- Vectores y operaciones básicas
- Combinaciones lineales
- Producto escalar – interior – interno – punto
- Norma, Longitud de un vector y vectores unitarios
- Distancias y ángulos
- Multiplicación por matrices

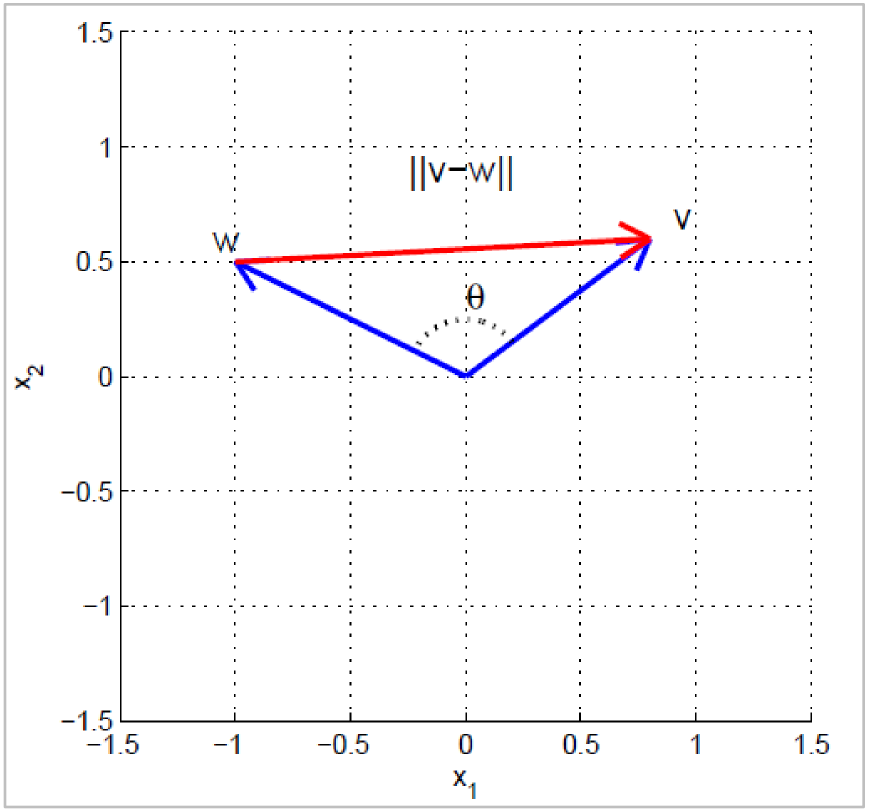
Distancia entre vectores

- Dados dos vectores **v** y **w**, la distancia entre ambos se define como:

$$d(\mathbf{v},\mathbf{w}) \triangleq \|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|$$

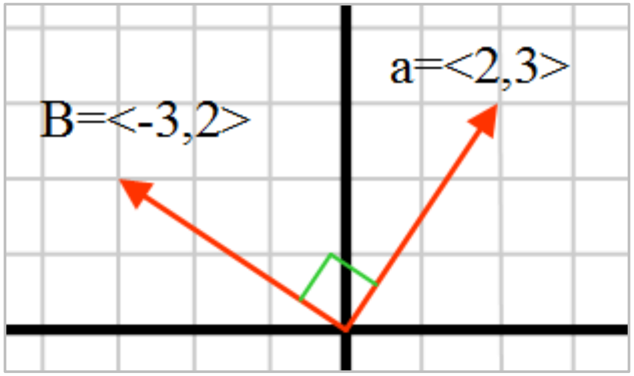
y ángulo que forman entre ellos es:

$$\angle(\mathbf{v},\mathbf{w}) \triangleq \mathbf{acos}\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|} = \theta$$



Vectores ortogonales

- Dos vectores son ortogonales (perpendiculares) si y sólo si su producto escalar es igual a 0

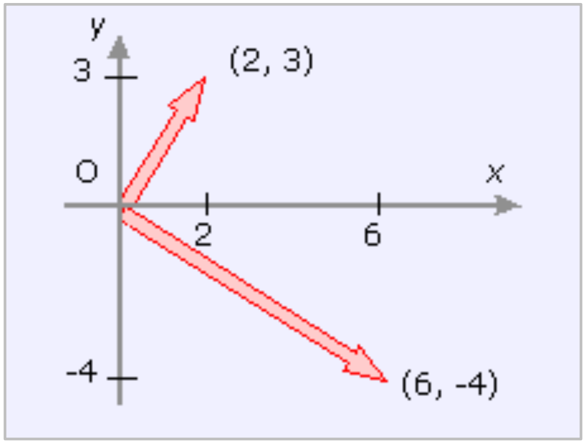


- Se representa como:

$$\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$$

- En este caso,

$$\angle(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{\pi}{2}$$



Distancia y ángulos entre dos vectores

Ejemplo

Dados $\mathbf{v} = \left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{3}\right)$ y $\mathbf{w} = \left(1, \frac{2}{3}\right)$. Calcular el ángulo formado entre los dos vectores.

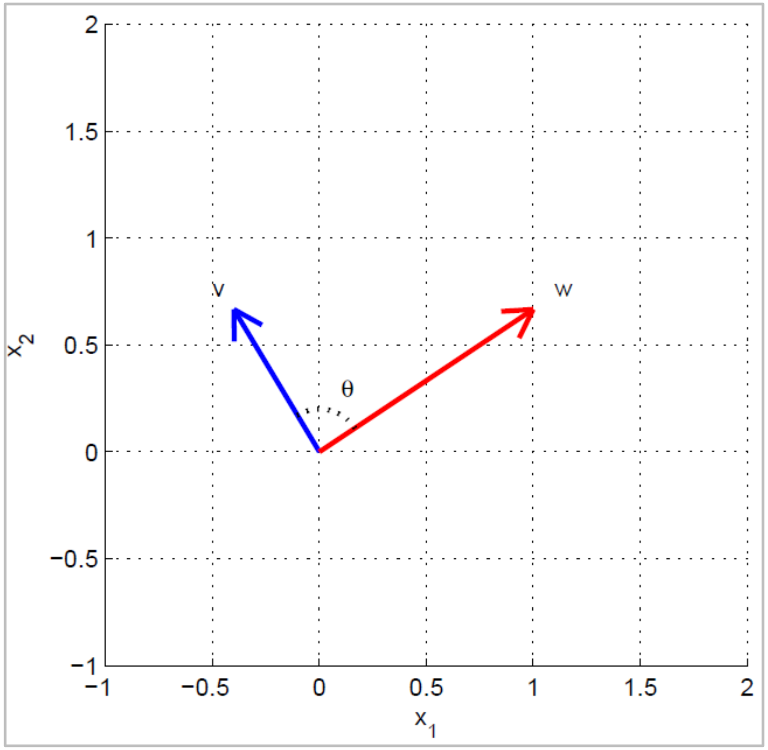
$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{45} = 0{,}0444$$

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\left(-\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{136}}{15} = 0{,}7775$$

$$\|\mathbf{w}\| = \sqrt{(1)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{3} = 1{,}2019$$

$$\angle(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \operatorname{acos}\left(\frac{\frac{2}{45}}{\frac{\sqrt{136}}{15} \cdot \frac{\sqrt{13}}{3}}\right) = \mathbf{87{,}27^{o}}$$

Por lo tanto, **v** y **w** son casi ortogonales



Distancia y ángulos entre dos vectores

Ejemplo

Dados $\mathbf{v} = (1,0,0,1,0,0,1,0,0,1)$ y $\mathbf{w} = (0,1,1,0,1,1,0,1,1,0)$.

Estos dos vectores en un espacio de 10 dimensiones son ortogonales porque:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 1{\cdot}0 + 0{\cdot}1 + 0{\cdot}1 + 1{\cdot}0 + 0{\cdot}1 + 0{\cdot}1 + 1{\cdot}0 + 0{\cdot}1 + 0{\cdot}1 + 1{\cdot}0 = 0$$

Ejemplo

Buscar un vector que sea ortogonal a $\mathbf{v} = \left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{3}\right)$

Solución:

Buscamos un vector $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ ortogonal a **v**, es decir,

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0 = \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot w_1 + \frac{2}{3} \cdot w_2 \quad \Rightarrow \quad w_2 = \frac{3}{5} \cdot w_1$$

Por tanto, cualquier vector de la forma $\mathbf{w} = (w_1, \ \frac{3}{5} w_1) = w_1(1, \ \frac{3}{5})$ es perpendicular a **v**.

Esta es la línea que pasa por el origen y con dirección $(1, \ \frac{3}{5})$.

En particular, para $\mathbf{w_1} = \frac{2}{3}$, tenemos que $\mathbf{w} = (\frac{2}{3}, \ \frac{2}{5})$, y para $\mathbf{w_1} = -\frac{2}{3}$, tenemos que $\mathbf{w} = (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{5})$.

Esta es una regla general en 2D. Dado un vector $\mathbf{v} = \mathbf{(a, b)}$, los vectores $\mathbf{w} = \mathbf{(b, -a)}$ y $\mathbf{w} = \mathbf{(-b, a)}$ son <u>ortogonales a</u> <u>**v**</u>

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \perp (\mathbf{b}, -\mathbf{a})$$
$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \perp (-\mathbf{b}, \mathbf{a})$$

Teorema de Pitágoras

Si $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$, entonces $\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$

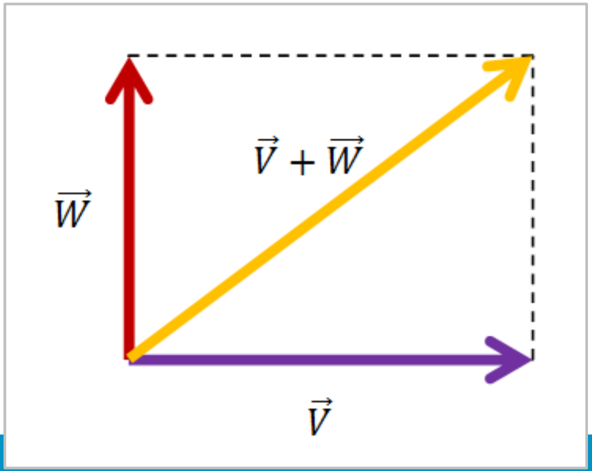
Demostración:

$$\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|^2 = (\mathrm{v}+\mathrm{w})^T\,(\mathrm{v}+\mathrm{w}) = \mathrm{v}^T\mathrm{v} + \mathrm{v}^T\mathrm{w} + \mathrm{w}^T\mathrm{v} + \mathrm{w}^T\mathrm{w} = \|\mathrm{v}\|^2 + \|\mathrm{w}\|^2 + 2\langle \mathrm{v},\mathrm{w}\rangle$$

$$\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|^2 = \langle \mathrm{v}+\mathrm{w}, \mathrm{v}+\mathrm{w}\rangle = \langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle + \langle \mathrm{v},\mathrm{w}\rangle + \langle \mathrm{w},\mathrm{v}\rangle + \langle \mathrm{w},\mathrm{w}\rangle = \|\mathrm{v}\|^2 + \|\mathrm{w}\|^2 + 2\langle \mathrm{v},\mathrm{w}\rangle$$

Pero, como $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$, tenemos que $\langle \mathbf{v}, \boldsymbol{w}\rangle = \mathbf{0}$, y en consecuencia,

$$\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$$



Teorema de Pitágoras

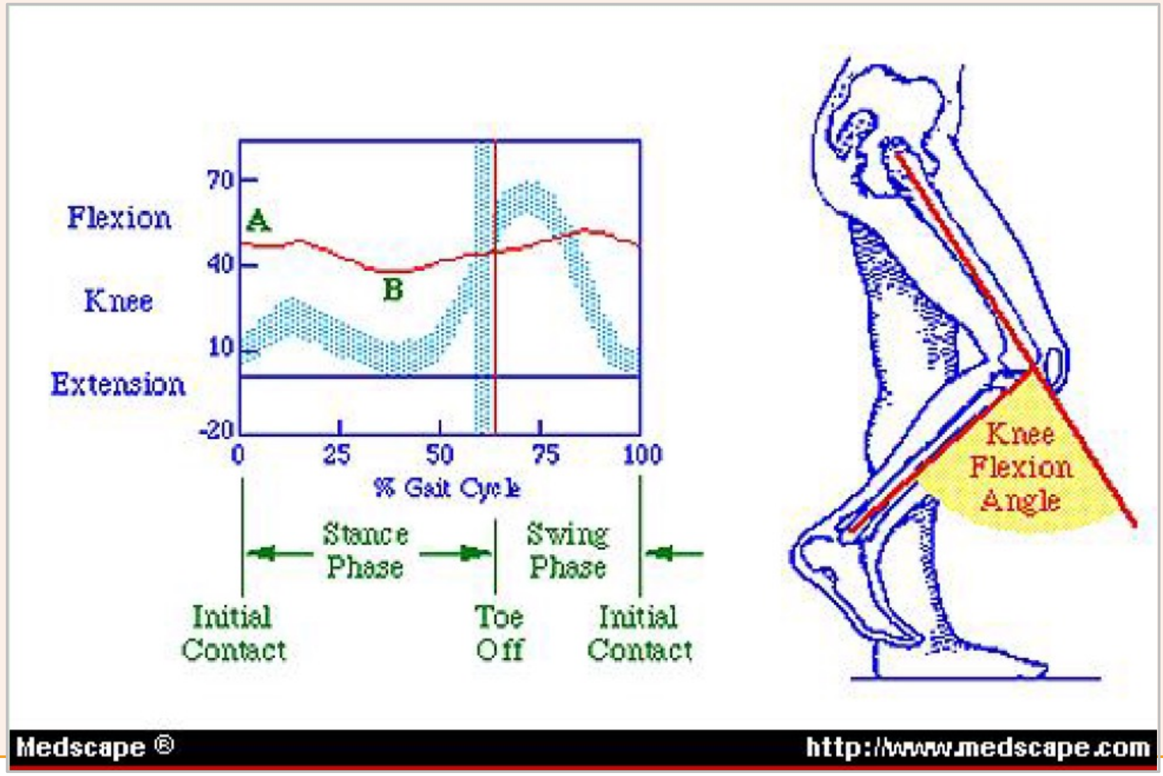
Corolario

- Si $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle < \mathbf{0}$, entonces $\dfrac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$
- Si $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle > \mathbf{0}$, entonces $0 \leq \theta < \dfrac{\pi}{2}$
- Para dos vectores unitarios, $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$, tenemos que $\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\theta} = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$, y en consecuencia, $-\mathbf{1} \leq \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle \leq \mathbf{1}$

Distancia y ángulos entre vectores

Ejemplo

- Para calcular el ángulo de flexión de la rodilla, podemos utilizar el producto escalar entre los vectores alineados con la pierna, antes y después de la rodilla



Teorema: desigualdad de Cauchy-Schwarz

- Dados dos vectores v y w cualquiera se verifica que:

$$|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle| \leq \|\mathbf{v}\| \, \|\mathbf{w}\|$$

- Demostración:

$$\langle v, w \rangle = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos q \Rightarrow \left|\langle v, w \rangle\right| = \left|\|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos q\right| = \|v\| \cdot \|w\| \cdot |\cos q| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

Ejemplo

Dados los vectores $\mathbf{v} = \left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{3}\right)$ y $\mathbf{w} = \left(1, \frac{2}{3}\right)$, sabemos que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \frac{2}{45}$, $\|\mathbf{v}\| = \frac{\sqrt{136}}{15}$, y $\|\mathbf{w}\| = \frac{\sqrt{13}}{3}$

Si verificamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos:

$$\left|\frac{2}{45}\right| \leq \frac{\sqrt{136}}{15} \cdot \frac{\sqrt{13}}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}0444 \leq 0{,}9344$$

Teorema: desigualdad triangular

- Dados dos vectores cualquiera, **v** y **w**, se verifica que:

$$\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$$

Demostración:

Por la definición, sabemos que:

$$\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|^2 = (\mathbf{v}+\mathbf{w})^T\,(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 + 2\langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos que:

$$\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|^2 \leq \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\| = (\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|)^2$$

Tomando la raíz cuadrada en ambos lados, tenemos:

$$\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$$

Teorema: desigualdad triangular

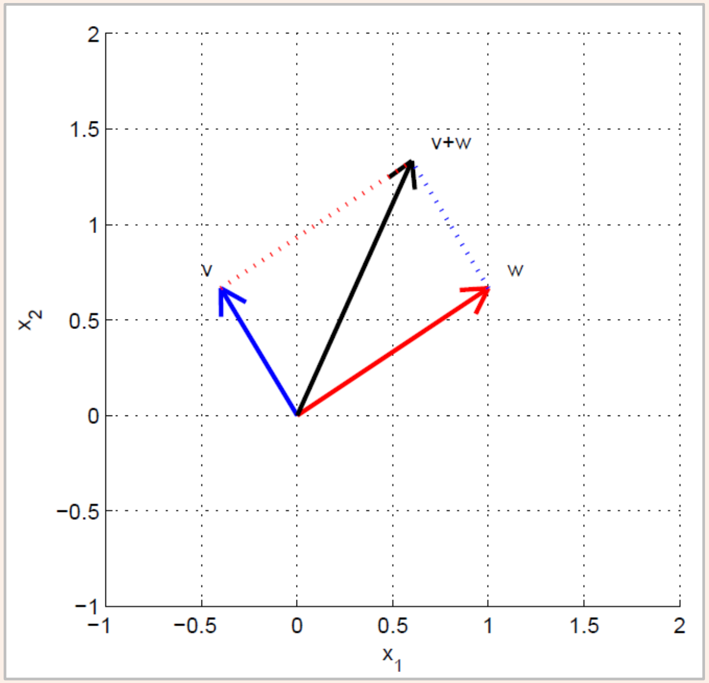
Ejemplo

Dados los vectores $\mathbf{v} = \left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{3}\right)$ y $\mathbf{w} = \left(1, \frac{2}{3}\right)$, sabemos que $\|\mathbf{v}\| = \frac{\sqrt{136}}{15}$, y $\|\mathbf{w}\| = \frac{\sqrt{13}}{3}$

Si verificamos la desigualdad triangular tenemos:

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| = \frac{\sqrt{481}}{15}$$

$$\frac{\sqrt{481}}{15} \leq \frac{\sqrt{136}}{15} + \frac{\sqrt{13}}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 1{,}4621 \leq 1{,}9793$$



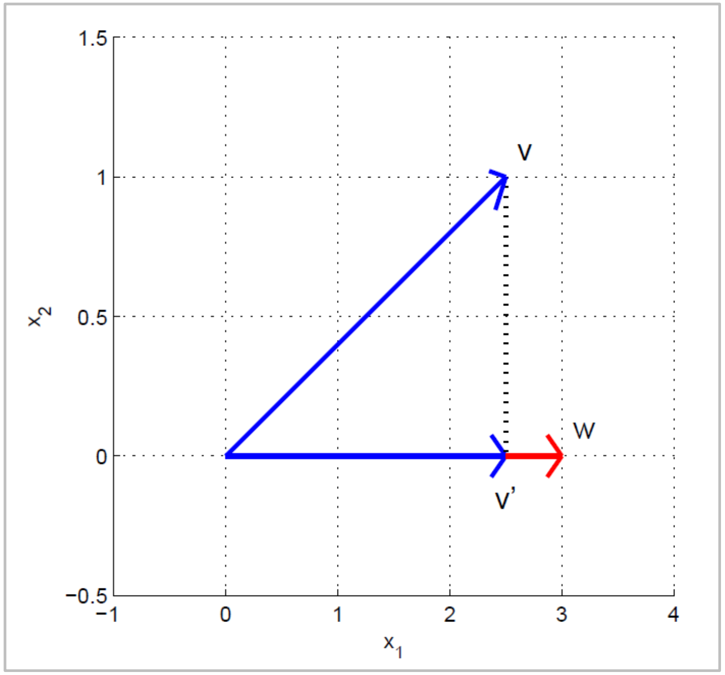
Proyecciones ortogonales

- Consideremos la proyección ortogonal de **v** sobre **w**

$$\mathbf{v}' = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}{\|\mathbf{w}\|} \cdot \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}$$

- La longitud de este vector es:

$$\|\mathbf{v}'\| = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}{\|\mathbf{w}\|}$$



Ejemplo

Dados los vectores de la figura $\mathbf{v} = \left(\frac{5}{2}, 1\right)$ y $\mathbf{w} = (3{,}0)$, entonces $\mathbf{v}' = \frac{\frac{5}{2}\cdot 3 + 1\cdot 0}{3}(1{,}0) = \left(\frac{5}{2}, 0\right)$

Índice de contenidos

- Vectores y operaciones básicas
- Combinaciones lineales
- Producto escalar – interior – interno – punto
- Norma, Longitud de un vector y vectores unitarios
- Distancias y ángulos
- Multiplicación por matrices

Multiplicación por matrices

Multiplicación de matrices como una combinación lineal

Regla general: una multiplicación de matrices se puede ver como una combinación lineal de las columnas de la matriz

$$A = \left(\mathbf{c}_1\ \mathbf{c}_2 \dots \mathbf{c}_p\right) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y} = A\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{p} x_i\, \mathbf{c}_i$$

Multiplicación de matrices como productos escalares o punto

Una multiplicación de matrices se puede ver como el producto escalar o punto de los valores del vector con las filas de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1^T \\ \mathbf{r}_2^T \\ \dots \\ \mathbf{r}_n^T \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y} = A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{r}_1, \mathbf{x} \rangle \\ \langle \mathbf{r}_2, \mathbf{x} \rangle \\ \dots \\ \langle \mathbf{r}_n, \mathbf{x} \rangle \end{pmatrix}$$

Propiedades

$$A\,(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$$

$$A\,(c\,\mathbf{u}\,) = c\,(A\mathbf{u}\,)$$

CEU Universidad San Pablo

Multiplicación por matrices

Ejemplo (como combinación lineal)

Consideremos tres vectores $\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Consideremos la combinación lineal:

$$\mathbf{y} = \mathrm{x}_1\mathbf{v_1} + \mathrm{x}_2\mathbf{v_2} + \mathrm{x}_3\mathbf{v_3} = \mathrm{x}_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{x}_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathrm{x}_3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_3 - \mathrm{x}_2 \end{pmatrix}$$

Se puede obtener el mismo resultado construyendo una matriz:

$$A = (\mathbf{v_1}\ \mathbf{v_2}\ \mathbf{v_3}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Haciendo la multiplicación, tenemos:

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} = A\begin{pmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \\ \mathrm{x}_3 \end{pmatrix} = (\mathbf{v_1}\ \mathbf{v_2}\ \mathbf{v_3})\begin{pmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \\ \mathrm{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \\ \mathrm{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_3 - \mathrm{x}_2 \end{pmatrix}$$

Multiplicación por matrices

Ejemplo (como productos escalares)

Se puede obtener el mismo resultado calculando $\mathbf{y}$ como el producto escalar de las filas de la matriz A por los valores del vector

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \langle (1,0,0), (\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3) \rangle \\ \langle (-1,1,0), (\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3) \rangle \\ \langle (0,-1,1), (\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3) \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_3 - \mathrm{x}_2 \end{pmatrix}$$